KORESPONDENSI PARABOLIK-ELIPTIK BERDASARKAN PENDEKATAN BEDA HINGGA TERHADAP PERSAMAAN PANAS

Kartika Zaini[1*], M. Natsir[2], Bustami[2]

[1]Mahasiswa Program S1 Matematika
[2]Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru, 28293, Indonesia

[*]Kartikazainizd.yahoo.com

ABSTRACT

Partial differential equations can be clasified into parabolic , elliptic, and hyperbolic equations. In this article, we discuss the correspondence between parabolic and elliptic equations of the heat equation as seen from the heat flow. Suppose *u* states the temperature on the object. If the two-dimensional heat equation is not affected by the times, the heat flow in steady state and parabolic equations become elliptic equations. To solve the heat equation, we can be used with the finite difference method and the alternating direction implicit.

Keywords: *alternating direction implicit method, finite difference method.*

ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial dapat berbentuk persamaan parabolik, eliptik, dan hyperbolik. Dalam artikel ini dibahas tentang korespondensi antara persamaan parabolik dan eliptik terhadap persamaan panas yang dilihat dari aliran panasnya. Misalkan *u* menyatakan suhu pada benda. Jika *u* pada persamaan panas berdimensi dua dan tidak dipengaruhi oleh waktu, maka aliran panas dalam keadaan stabil dan persamaan parabolik menjadi persamaan eliptik. Untuk menyelesaikan persamaan panas dapat digunakan dengan metode beda hingga dan alternating direction implicit.

Kata kunci : metode alternating direction implicit, metode beda hingga.

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunannya yang tidak diketahui. Jika terdapat satu variabel bebas (*single independent variabel*) dan turunannya merupakan turunan biasa maka disebut dengan persamaan differensial biasa, dan jika terdapat dua atau lebih variabel bebas dan turunannya adalah turunan parsial maka persamaannya disebut dengan persamaan differensial parsial. Persamaan diferensial parsial menurut nilai koefisiennya dibedakan atas tiga persamaan, yaitu persamaan parabolik, eliptik, dan persamaan hiperbolik.

Pada artikel ini penulis membahas mengenai korespondensi antara persamaan parabolik-eliptik dalam persamaan panas yang dilihat pada aliran panasnya. Aliran panas ini adalah jumlah panas yang keluar atau masuk dari sebuah benda secara kuantitatif yang disebabkan adanya perpindahan energi yang terjadi karena adanya perbedaaan suhu diantara benda.

Persamaan aliran panas dapat digunakan untuk menghitung permasalahan aliran panas pada persamaan panas dimensi satu. Berikut diberikan persamaan aliran panas dimensi satu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

dimana u adalah suhu pada benda.

Persamaan aliran panas pada dimensi satu pada persamaan (1) ekuivalen dengan persamaan aliran panas pada dimensi dua yang diberikan pada persamaan berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Jika u pada persamaan (2) dipengaruhi oleh waktu maka aliran panas pada persamaan (2) ini berada dalam keadaan tidak stabil. Dalam kasus ini persamaan (2) adalah persamaan parabolik dalam bentuk dimensi dua yang punya tiga variabel bebas yaitu *t, x dan y.* Jika u pada persamaan (2) tidak dipengaruhi waktu maka aliran panas dalam keadaan stabil, sehingga persamaannya menjadi persamaan eliptik atau peramaan (*Laplace)* seperti persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Penyelesaian persamaan panas dapat dilakukan secara analitik atau secara numerik. Untuk kasus tertentu digunakan penyelesaian numerik sebagai pendekatan untuk analitik. Untuk memperoleh solusi numerik dari korespondensi parabolik-eliptik pada persamaan panas dapat diselesaikan dengan salah satu metode yaitu dengan metode beda hingga. Metode beda hingga dapat dilakukan setelah proses diskritisasi dengan membagi bidang yang menjadi sasaran dengan membuat jaringan titik-titik.

Pada artikel ini di bagian 2 dibahas tentang metode beda hingga, di bagian 3 dibahas tentang *alternating direction implicit* selanjutnya pada bagian terakhir dibahas korespondensi persamaan Parabolik-Eliptik yang merupakan review dari artikel Mohd Sallehs Sahimi and Norma Aalias [3],

2. METODE FINITE DIFFERENCE

Misalkan variabel yang berpengaruh adalah x dan y, maka untuk membentuk pola jaringan titik-titiknya dengan cara membagi interval pada sumbu x menjadi sejumlah n

subinterval yang panjangnya h dan membagi interval pada sumbu *y* menjadi sejumlah *m* subinterval yang panjangnya *k*. Jumlah *n* juga berpengaruh pada keakuratan hasil.

Dari Deret Taylor dua variabel , untuk $x = x_0 + h$, $x = x_0 - h$, dan $y = y_0$ di peroleh

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} + O(h^4), \quad (3)$$

dan

$$f(x_0 - h, y_0) = f(x_0, y_0) - h\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} + O(h^4), \quad (4)$$

susun ulang pada persamaan (3) dan (4), diperoleh formula *forward* difference dan *backward difference* untuk turunan pertama terhadap *y* berturut-turut

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\right) + O(h),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left(\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h}\right) + O(h).$$

Lakukan operasi pengurangan terhadap persamaan (3) dengan persamaan (4), maka diperoleh formula *central difference* untuk turunan pertama terhadap *y*,

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0) = 2h\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + O(h^3),$$

atau bisa ditulis dengan

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cong \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{2h} + O(h^2).$$

Sementara itu, jika persamaan (3) dengan persamaan (4) dilakukan operasi penjumlahan

$$f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0) = 2f(x_0, y_0) + h^2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + O(h^4),$$

maka diperoleh formula *central difference* untuk turunan kedua terhadap *y*,

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cong \frac{f(x_0 + h, y_0) - 2f(x_{0,} y_0) + f(x_0 - h, y_0)}{h^2} + O(h^2).$$

Jika solusinya dimisalkan dengan notasi indeks ganda $u_{i,j} = u(x_{i,} y_j)$, untuk $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,m$, maka keseluruh formula tadi dapat ditulis sebagai berikut

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Lakukan langkah yang sama untuk $y = y_0 + k$, $y = y_0 - k$ dan $x = x_0$ maka diperoleh sebagai berikut

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Pendekatan beda hingga untuk turunan atau orde yang lebih tinggi dapat dicari dengan mengambil lebih banyak suku pada deret Taylor-nya.

3. METODE ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT

Dalam matematika metode *Alternating Direction Implicit* (ADI) adalah metode beda hingga untuk memecahkan persamaan diferensial parsial parabolik, hiperbolik dan eliptik. Metode ADI digunakan untuk menyelesaikan masalah konduksi panas atau menyelesaikan persamaan difusi 2 dimensi.

Sebagai contoh [2]

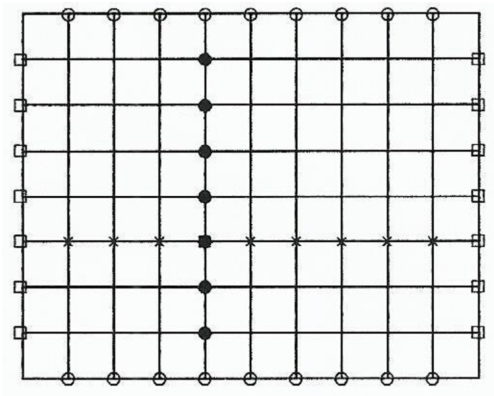
$$\left(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right)U^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2\right)U^n, \qquad (5)$$

dari persamaan (5) dapat dibagi

$$\left(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)U^{n+*}=\left(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)U^n$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2\right)U^{n+1}=U^{n+*}.$$

dimana notasi U^{n+*} adalah pendekatan pada pertengahan waktu seperti terlihat pada gambar



Gambar 2.3: Titik batas untuk metode ADI.

Umumnya metode alternating direction implicit digunakan Douglas dan Rachford [2] pada dimensi dua dalam bentuk

$$\left(1-\mu_x\delta_x^2\right)U^{n+1*}=\left(1+\mu_y\delta_y^2\right)U^n,$$

dan

$$\left(1-\mu_y\delta_y^2\right)U^{n+1*}=U^{n+1*}-\mu_x\delta_y^2U^n, \tag{6}$$

selanjutnya eliminasi U^{n+1*} pada persamaan (6) maka diperoleh

$$\left(1-\mu_x\delta_x^2\right)\left(1-\mu_y\delta_y^2\right)U^{n+1}=\left(1+\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2\right)U^n. \tag{7}$$

Pada persamaan (7) sesuai dengan persamaan diferensial jika U^{n+1*} dipandang sebagai pendekatan untuk U^{n+1} dan galat pemotongan (truncation error) adalah $O\left(\Delta t+(\Delta x)^2\right)$.

3. PEMBENTUKAN BEDA HINGGA SATU DIMENSI DAN DIMENSI DUA

Diberikan persamaan panas satu dimensi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Langkah berikutnya adalah membentuk persamaan *finite difference*-nya dengan mensubstitusikan formula *central difference* untuk turunan pertama terhadap t dan formula *central difference* untuk turunan kedua terhadap x kepersamaan konduksi panas (8) diperoleh

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{3}\delta_x^2 \left(\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \right), \tag{9}$$

dengan $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \lambda$ maka persamaan (9) menjadi

$$\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\delta_x^2\right)u_{i,j+1} = \frac{2}{3}\lambda\delta_x^2 u_{i,j} + \left(1 + \frac{2}{3}\lambda\delta_x^2\right)u_{i,j-1}.$$

Selanjutnya akan di bahas mengenai persamaan aliran panas dimensi dua. Pada persamaan aliran panas dimensi dua u dipengaruhi oleh waktu, dimana u adalah suhu pada benda sehingga persamaan aliran panasnya dalam keadaan stabil. Persamaan aliran panas ini merupakan persamaan parabolik dimensi dua dengan tiga variabel. Persamaan (9) dalam keadaan stabil dan akurat pada persamaan diferensial berikut

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{3}\delta_x^2 \left(\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \right) - \frac{(\Delta x)^2 \delta_t^2}{12(\Delta t)^2} u_{i,j}. \tag{10}$$

Antara persamaan aliran panas dimensi satu dengan persamaan aliran panas dimensi dua adanya keekuivalenan, maka untuk persamaan aliran panas pada dimensi dua diberikan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{11}$$

pada persamaan (11) diberikan sebagai berikut

$$\left(1-\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)u_{i,j,k+1}=\left(\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)+\frac{4}{9}\lambda^2\alpha\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{i,j,k}$$

$$+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)+\frac{4}{9}\lambda^2\beta\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{i,j,k-1}, \qquad (12)$$

persamaan (12) dapat di uraikan sebagai berikut untuk memenuhi metode ADI,

$$\left(1-\frac{2}{3}\lambda\delta_x^2\right)u_{i,j,k+1/2}=\frac{2}{3}\lambda\delta_y^2\left(\alpha u_{i,j,k}+\beta u_{i,j,k-1}+\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)u_{i,j,k}\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)\right)u_{i,j,k-1},$$

dan

$$\left(1-\frac{2}{3}\lambda\delta_y^2\right)u_{i,j,k+1}=u_{i,j,k+1/2}-\frac{2}{3}\lambda\delta_y^2\left(\alpha u_{i,j,k}+\beta u_{i,j,k-1}\right).$$

dimana $\alpha+\beta=1$ dan $\lambda=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$

4. KORESPONDENSI PARABOLIK-ELIPTIK PADA PERSAMAAN PANAS DIMENSI DUA

Dari yang sudah dibahas sebelumnya maka untuk korespondensi parabolik-eliptik dapat dilihat dari aliran panasnya. Aliran panas terjadi karena adanya perbedaan suhu diantara benda. Dari persamaan (10) dan persamaan (11) diperoleh

$$\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_x^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_y^2\right)u_{i,j,k+1}=\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\frac{1}{2}\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{i,j,k}$$

$$+\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)u_{i,j,k-1}+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)^2\delta_x^2\delta_y^2\left(2u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}\right),$$ ma
ka

persamaan ADI diberikan sebagai berikut,

$$\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_x^2\right)u_{i,j,k+1/2}=-\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_y^2\left(2u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}\right)$$

$$+\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\frac{1}{2}\delta_x^2\delta_y^2\right)u_{i,j,k}+\left(1+\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\lambda\right)\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)u_{i,j,k-1},$$

dan

$$\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_y^2\right)u_{i,j,k+1}=u_{i,j,k+1/2}+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\lambda\right)\delta_y^2\left(2u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}\right).$$

Jika u tidak dipengaruhi oleh waktu maka aliran panas dalam kondisi yang stabil, maka persamaan parabolik (11) menjadi persamaan elliptik (persamaan Laplace)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{13}$$

dengan menggunakan metode ADI maka solusi dari persamaan (13) diperoleh sebagai berikut

$$\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}r\right)\delta_x^2\right)u_{i,j}^{*}=\left(-\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}r\right)\delta_y^2+\frac{2}{3}\lambda\left(\delta_x^2+\delta_y^2+\frac{1}{2}\delta_x^2\delta_y^2\right)\right.$$

$$\left.+\left(1+\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\lambda\right)\left(\delta_x^2+\delta_y^2\right)\right)\right)u_{i,j}^{(p)}$$

dan

$$\left(1+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}r\right)\delta_y^2\right)u_{i,j}^{(p+1)}=u_{i,j}^{*}+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}r\right)\delta_y^2 u_{i,j}^{(p)}.$$

5. KESIMPULAN

Bedasarkan pembahasan yang telah dikemukakan maka dapat disimpulkan bahwa korespondensi antara persamaan parabolik-eliptik dilihat dari aliran panas. Persamaan aliran panas dapat menyelesaikan permasalahan persamaan panas beberapa dimensi salah satunya pada dimensi satu. Persamaan panas dimensi satu ekuivalen dengan persamaan panas dimensi dua. Pada persamaan panas dimensi dua jika u pada $\frac{\partial u}{\partial t}\to 0$ atau tidak dipengaruhi oleh waktu maka aliran panasnya dalam keadaan stabil, maka persamaan parabolik dapat dikatakan persamaan eliptik. Dengan menggunakan metode beda hingga turunan pertama dan turunan kedua *central difference* yang memenuhi syarat metode ADI maka didapat solusi dari persamaan eliptik.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chapra, S. C. & R. P. Canale. 2002. *Numerical Methods For Engineers, 4th Ed.* The McGraw-Hill, New York

[2] Morton, K.W. & Mayers D.F. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equations, 2nd Ed*. Cambridge University, New York.

[3] Sahimi, M.S. 2003. Parabolic-Elliptic Correspondence of a Three-Level Finite Difference Approximation to the Heat Equation. *Bull. Malaysian Math. Sc. Soc*. (Second Series), 26 : 79−85